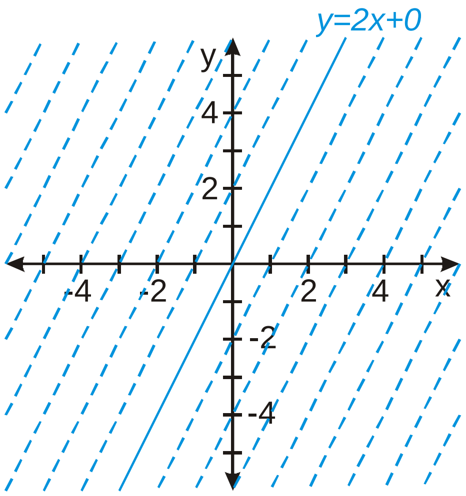
2.8.6 Parametrické systémy funkcí

Předpoklady: 2111, 2401, 2414, 2501, 2601

Stejně jako parametrická rovnice zastupuje mnoho rovnic najednou, parametricky zadaná funkce zastupuje mnoho funkcí.

Pedagogická poznámka: Názornost hodiny může podstatně zvýšit použití počítačově generovaných dynamických grafů.

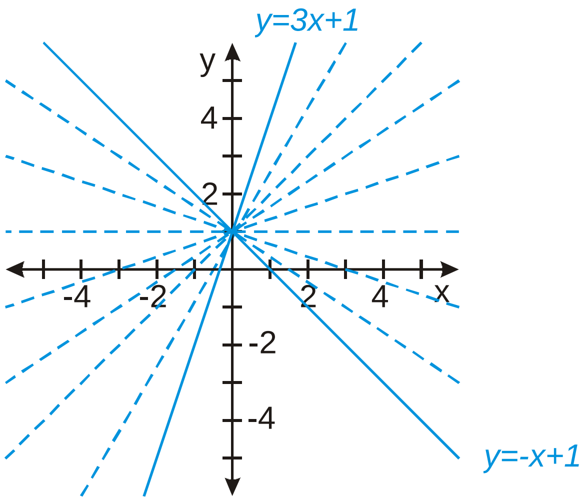
Př. 1: Nakresli parametrický systém lineárních funkcí daných předpisem $y = 2x + b$.



Nakreslíme plnou čarou jednu konkrétní funkci $y = 2x + 0$, další funkce pro další hodnoty parametru b nakreslíme čárkovaně $\Rightarrow$ získáme soustavu rovnoběžných přímek

Př. 2: Nakresli parametrický systém lineárních funkcí daných předpisem $y = ax + 1$, $a \in \langle -1;3 \rangle$.

Opět budeme kreslit lineární funkce, budou se lišit ve sklonu a budou procházet bodem $[0;1]$. Nakreslíme si krajní funkce $y = -x + 1$ a $y = 3x + 1$, ostatní funkce budou ležet mezi nimi.

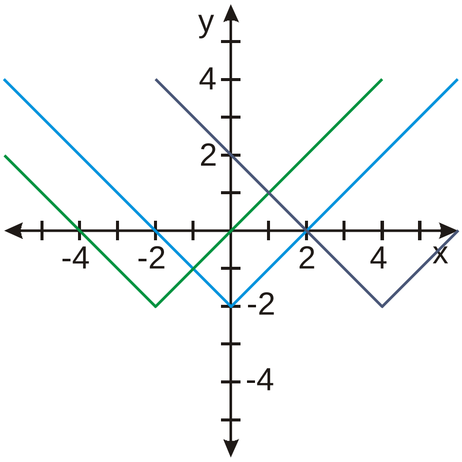


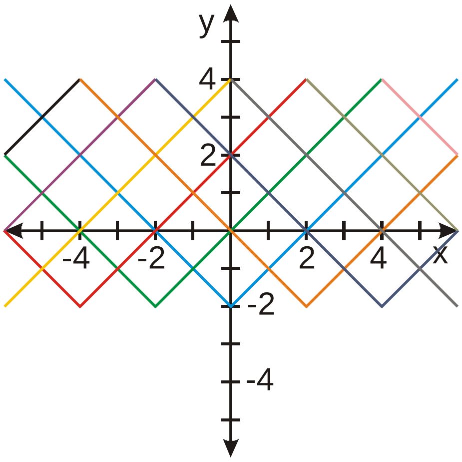
Pedagogická poznámka: Je potřeba dbát na to, aby obrázek z předchozího příkladu byl názorný. Studenti často nakreslí pouze krajní funkce a není pak zřejmé, který ze vzniklých úhlů vyplní funkce tvořící zadaný parametrický systém.

V podstatě nejde o nic jiného, než si pamatovat vliv konstant na grafy jednotlivých funkcí.

Př. 3: Nakresli parametrický systém funkcí s absolutní hodnotou daných předpisem $y = |x+c| - 2$.

Jednotlivé funkce v systému se budou lišit posunutím na vodorovné ose.

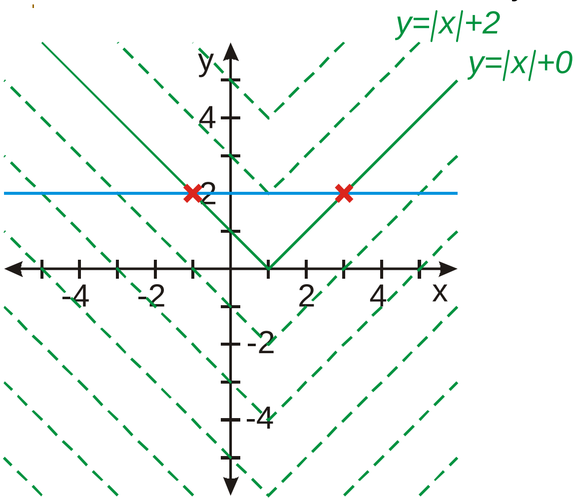




Př. 4: Je dána rovnice $|x-1| + a = 2$ s neznámou $x \in R$ a parametrem $a \in R$. Urči pomocí grafického znázornění všechny hodnoty parametru *a*, pro něž má tato rovnice aspoň jedno řešení.

Nakreslíme si obě strany rovnice:

- Levá strana: parametrický systém funkcí s absolutní hodnotou. Všechny mají minimum v bodě $x = 1$, liší se posunutím ve svislém směru, které určuje parametr *a*.
- Pravá strana: konstantní funkce $y = 2$.



Z obrázku je zřejmé, že rovnice má:

- dvě řešení pro $a < 2$,
- jedno řešení pro $a = 2$,

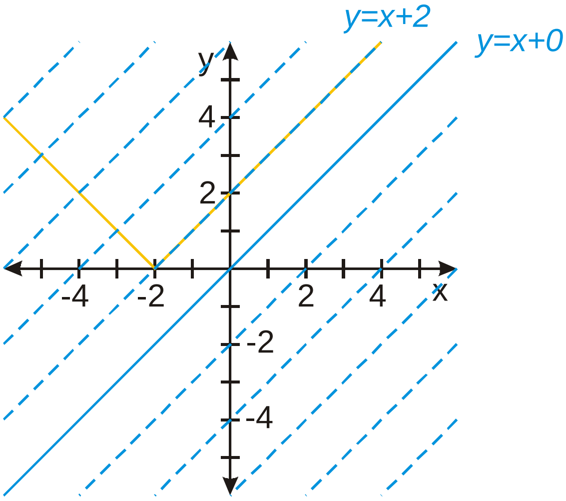
- žádné řešení pro $a > 2$.

Rovnice má alespoň jedno řešení pro $a \leq 2$.

Př. 5: Je dána rovnice $|x+2| = x+a$ s neznámou $x \in R$ a parametrem $a \in R$. Pomocí grafického znázornění proveď diskusi řešitelnosti vzhledem k parametru.

Nakreslíme si obě strany rovnice:

- Levá strana: funkce s absolutní hodnotou.
- Pravá strana: parametrický systém lineárních funkcí. Všechny mají stejný sklon, liší se posunutím ve svislém směru, které určuje parametr *a*.



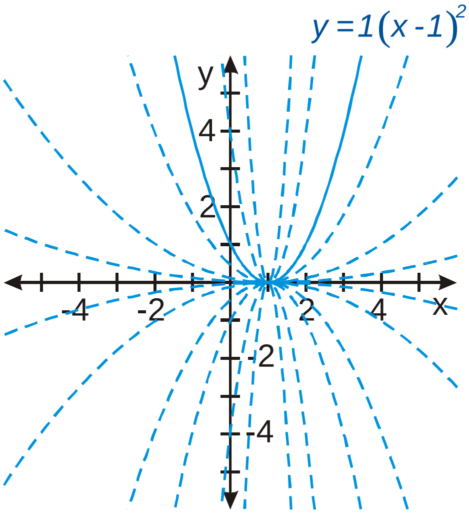
Z obrázku je zřejmé, že rovnice má:

- žádné řešení pro $a < 2$,
- nekonečně mnoho řešení pro $a = 2$ $K = \langle -2; \infty)$,
- jedno řešení pro $a > 2$.

Př. 6: Nakresli parametrický systém kvadratických funkcí daných předpisem $y = a(x-1)^2$, $a \in R$.

Všechny paraboly budou posunuté vpravo tak, aby jejich vrchol měl souřadnice $[1;0]$.

Parametr *a* před druhou mocninou ovlivňuje tvar a orientaci paraboly:



Kladné hodnoty parametru *a* znamenají tvar „ďolíku“, záporné tvar „kopečku“. Čím je větší absolutní hodnota parametru *a*, tím je graf užší.

Pedagogická poznámka: Studenti často zapomínají na záporné hodnoty parametru (a tedy „kopečkové“ tvary grafu).

Př. 7: Nakresli parametrický systém kvadratických funkcí daných předpisem $y = a(x+1)^2 + a$, $a \in R$.

Parametr se vyskytuje v předpisu funkce dvakrát, raději si zkusíme napsat několik předpisů pro různé hodnoty parametru:

$a = 1$: $y = (x-1)^2 + 1$,

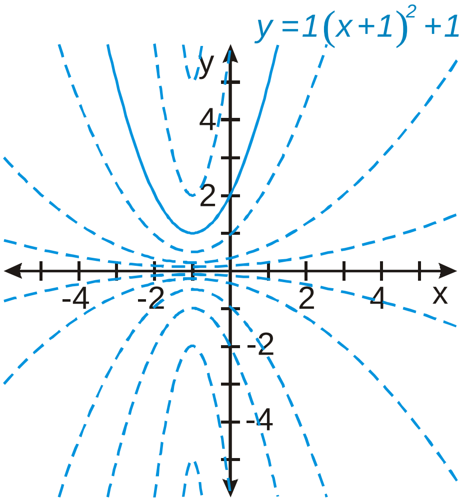
$a = 2$: $y = 2(x-1)^2 + 2$,

$a = 3$: $y = 3(x-1)^2 + 3$.

…

Všechny paraboly budou posunuté vlevo tak, aby jejich vrchol měl souřadnice $[-1; a]$.

Parametr *a* před druhou mocninou ovlivňuje tvar a orientaci paraboly a *y*-vou souřadnici jejího vrcholu $\Rightarrow$ s rostoucí hodnotou *a* se paraboly posunují nahoru a zužují se.



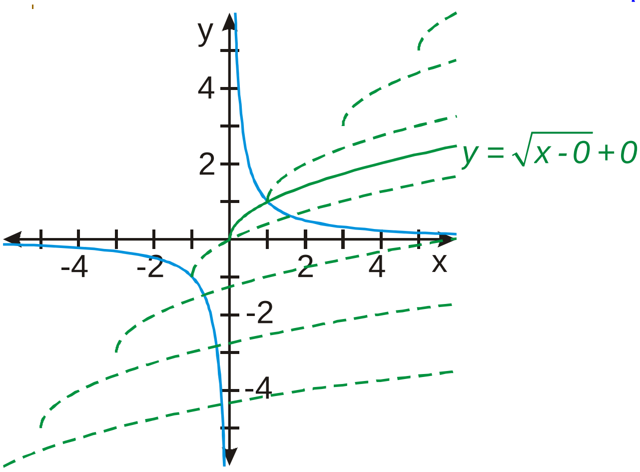
Kladné hodnoty parametru *a* znamenají tvar „ďolíku“, záporné tvar „kopečku“. Čím je větší absolutní hodnota parametru *a*, tím je graf užší.

Pedagogická poznámka: Výpis předpisů v řešení předchozího příkladu není samoúčelný. Studenti mají značný problém s dvojitým výskytem parametru v předpisu funkce. Častou chybou je, že studenti začínají od funkce $y=(x-1)^2$ místo funkce $y=(x-1)^2+1$.

Př. 8: Je dána rovnice $\sqrt{x-a}+a=\frac{1}{x}$ s neznámou $x\in R$ a parametrem $a\in R$. Pomocí grafického znázornění proveď diskusi řešitelnosti vzhledem k parametru.

Nakreslíme si obě strany rovnice:

- Levá strana: parametrický systém funkcí s odmocninou. Všechny funkce mají stejný tvar, liší se podle hodnot parametru polohou počátku, který je vždy v bodě $[a;a]$.
- Pravá strana: lineární lomená funkce $y=\frac{1}{x}$.



Z obrázku je zřejmé, že rovnice má:

- dvě řešení pro $a\leq -1$,
- jedno řešení pro $a\in(-1;1\rangle$,
- žádné řešení pro $a>1$.

Shrnutí: Parametrické systémy funkcí jsou obdobou parametrických rovnic. Při jejich kreslení potřebujeme znát vliv jednotlivých konstant na graf funkce.